

Correction : DS DE MATHEMATIQUES n° 6

Exercice 1 :

Dans une ruche formée de 50 000 abeilles, on estime que 20% des abeilles décèdent chaque jour à cause d'un insecticide. De plus 500 nouvelles abeilles naissent chaque jour.
On note u_n le nombre d'abeilles de la colonie n jours après la pulvérisation de l'insecticide; on a donc $u_0 = 50\,000$.
1. Nous avons la relation de récurrence suivante : $u_{n+1} = 0,8u_n + 500$.

2. Cherchons suite constante égale à r qui vérifie la relation de récurrence :
$r = 0,8r + 500 \Leftrightarrow 0,2r = 500 \Leftrightarrow r = 2\,500$.

3. Soite la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 2\,500$.
On sait que (v_n) est géométrique de raison $q = 0,8$; or $v_0 = u_0 - 2\,500 = 5\,000 - 2\,500 = 47\,500$.
On a donc $v_n = v_0 \times q^n = 47\,500 \times 08^n$.
Or $u_n = v_n + 2\,500 = 47\,500 \times 0,8^n + 2\,500$.

4. comme $0 < 0,8 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,8^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2\,500$.

5. D'après la calculatrice on trouve $u_n < 5\,000 \Leftrightarrow n \geqslant 14$.
A partir du 14-ième jour la colonie comptera moins de 5 000 abeilles, elle ne va pas survivre.

Exercice 2 :

1. Calculons la limite des suites de terme général :

a. $u_n = -3n^2 + \dfrac{2}{n+1}$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} -3n^2 = -\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n+1} = 0\end{array}\right\} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

b. $u_n = \mathrm{e}^{-3n+1} + 4$:
$\lim\limits_{n\to+\infty} -3n+1 = -\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-3n+1} = 0$; finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

c. $u_n = \ln(n+1) + 7n$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 7n = +\infty\end{array}\right\} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

2. (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison 0,6.
$v_n = v_0 \times q^n = 3 \times 0,6^n$; comme $0 < 0,6 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,6^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Exercice 3 :

Dans une école primaire, chaque année depuis 2019 (année de rang 0), on a relevé le nombre de livres empruntés à la blibliothèque de l'école.

Rang x_i de l'année	0	1	2	3	4	5
Nombre de livres y_i	201	187	180	162	160	134

Les résultats seront arrondis au centième.

1. Un ajustement affine de y en fonction de x est justifié d'après la forme du nuage de points et un coefficient de corrélation linéaire $r = -0,97$.

2. L'équation de la droite de régression de y en fonction de x est : $y = -12,4x + 201,67$.

3. $y < 60 \Leftrightarrow -12,4x + 201,67 < 60 \Leftrightarrow x > \dfrac{141,67}{12,4} \Leftrightarrow y > 11,76$.
Si la tendance se poursuit ainsi, on pourrait avoir moins de 60 livres empruntés à partir de l'année $2019 + 12 = 2031$.

Exercice 4 :

Eric a crée un site web ; le tableau ci-dessous présente l'évolution du nombre hebdomadaire de visiteurs de ce site au cours des huit premières semaines.

Rang x_i de la semaine	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre y_i de visiteurs	152	253	327	361	412	426	451	465

Les résultats seront arrondis au centième.
1. La forme du nuage de points ne suggère pas un ajustement affine de y en fonction de x.

2. On pose $z_i = \ln(x_i)$.
L'équation de la droite de régression de y en fonction de z est : $y = 153,63\ z + 152,23$.
Cet ajustement est justifié d'après la forme du nuage de points et le coefficient de corrélation linéaire est $r = 0,998$.

3. Par conséquent on obtient $y = 153,63\ \ln(x) + 152,23$.

4. $y > 600 \Leftrightarrow 153,63\ \ln(x) + 152,23 \Leftrightarrow \ln(x) > \dfrac{447,77}{153,63} \Leftrightarrow x > 18,56$.
Le premier entier cherché est donc $x = 19$; selon ce modèle, à partir de la semaine 19 le nombre de visiteurs dépassera-t-il 600.