Correction : DS DE MATHEMATIQUES n° 5

Exercice 1 :

1. $A = 3\ln 2 - \dfrac{1}{2}\ln 49 = \ln 2^3 - \ln(\sqrt{49}) = \ln 8 - \ln 7 = \ln\dfrac{8}{7}$.

2. Résolvons les équations et inéquations suivantes :

a. $2\ln(x+3) = 10$:
Condition : $x+3>0 \Leftrightarrow x>-3$; ainsi $D =]-3;+\infty[$.
$2\ln(x+3) = 10 \Leftrightarrow \ln(x+3) = 5 \Leftrightarrow x+3 = \mathrm{e}^5 \Leftrightarrow x = -3+\mathrm{e}^5$.
Comme $\mathrm{e}^5>0$, $-3+\mathrm{e}^5>-3$ donc $\mathscr{S} = \{-3+\mathrm{e}^5\}$.

b. $\ln x + 3 \leqslant 0$:
Condition : $x>0$, donc $D =]0;+\infty[$.
$\ln x + 3 \leqslant 0 \Leftrightarrow \ln x \leqslant -3 \Leftrightarrow x \leqslant \mathrm{e}^{-3}$.
Donc $\mathscr{S} =]0;\mathrm{e}^{-3}]$.

Exercice 2 :

Calculons la dérivée des fonctions suivantes :
1. $f(x) = x\ln x$:

On a $f = u\times v$ avec $\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} v(x) = \ln x \\ v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$.

Donc $f' = u'v+uv'$, soit $f'(x) = \ln x + x\times\dfrac{1}{x} = \ln x + 1$.

2. $f(x) = \ln(5x^2+1)$:
On a $f = \ln u$ avec $\begin{cases} u(x) = 5x^2+1 \\ u'(x) = 10x \end{cases}$.

Donc $f' = \dfrac{u'}{u}$, soit $f'(x) = \dfrac{10x}{5x^2+1}$.

Exercice 3 :

Déterminons les plus entier naturel n tel que :
1. $1,7^n > 30 \Leftrightarrow \ln(1,7^n) > \ln 30 \Leftrightarrow n\ln 1,7 > \ln 30 \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln 30}{\ln 1,7} \Leftrightarrow n > 6,409$.
En effet on sait que la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, et pour tout $x\in\mathbb{R}^{+*}$ on a $\ln(x^n) = n\ln x$.
Le plus petit entier n cherché est donc 7.

2. $0,9^n \leqslant 0,2 \Leftrightarrow \ln(0,9^n) \leqslant \ln 0,2 \Leftrightarrow n\ln 0,9 \leqslant \ln 0,2 \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln 0,2}{\ln 0,9} \Leftrightarrow n \geqslant 15,27$.
En effet comme $0,9<1$, alors $\ln 0,9 < 0$.
Le plus petit entier n cherché est donc 16.

Exercice 4 :

Une entreprise produit chaque année entre 100 et 900 pneus pour tracteurs.
On admet que le coût annuel moyen de fabrication d'un pneu, exprimé en centaines d'euros, pour x

centaines de pneus produits est modélisé par la fonction f définie sur $[1;9]$ par $f(x) = 0,5x^2 - 7x + 14 + 6\ln(x)$.

1. On a $f = 0,5u + v + 6w$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ u'(x) = 2x \end{cases}$, $\begin{cases} v(x) = -7x + 14 \\ v'(x) = -7 \end{cases}$ et $\begin{cases} w(x) = \ln x \\ v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$.

Donc $f' = 0,5u' + v' + 6w'$, soit $f'(x) = x - 7 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2 - 7x + 6}{x}$.

2. Sur l'intervalle $[1;9]$ on sait que $x > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $P(x) = x^2 - 7x + 6$.
1 est racine évidente de P ; $1x_2 = \dfrac{c}{a} \Leftrightarrow x_2 = 6$.
On sait $P(x)$ est du signe de $a = 1$ sauf entre ses racines ; on en déduit le tableau de variations de f :

x	1		6		9
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$7,5$	$\searrow$	$0,7506$	$\nearrow$	$4,683$

3. Le tableau de variation nous permet d'affirmer que le prix moyen minimal est de 75,06 euros en produisant 600 pneus.

Exercice 5 :

Une quantité subit une hausse de 26 % sur 5 ans ; le coefficient multiplicateur global est donc de 1,26.
Notons c_m le coefficient multiplicateur correspondant au taux annuel moyen. On a alors :
$c_m^5 = 1,26 \Leftrightarrow c_m = 1,26^{\frac{1}{5}} = 1,0473 = 1 + \dfrac{4,73}{100}$.

L'évolution annuelle moyenne est donc une hausse de 4,73 %.