Correction : DS DE MATHEMATIQUES n° 4

Exercice 1 :

Pour tout entier naturel n , posons $a = 2n + 1$ et $b = 3n + 2$.

On constate que $2b - 3a = 1$; comme 2 et -3 sont entiers, d'après le théorème de Bézout on peut affirmer que a et b sont premiers entre eux.

Exercice 2 :

La longueur du patchwork est de 180 cm, la largeur de 140 cm.

c est le plus grand diviseur commun à 180 et 140, donc $c = 180 \wedge 140$.

Or $180 \wedge 140 = 10 \times (18 \wedge 14) = 10 \times 2 \times (9 \wedge 7) = 10 \times 2 \times 1 = 20$.

Les carrés de tissu doivent mesurer 20 cm de côté.

Exercice 3 :

On considère $a = 145$ et $b = 55$.

1. Calculons $\delta = a \wedge b$ avec l'algorithme d'Euclide :

$$145 = 55 \times 2 + 35$$

$$55 = 35 \times 1 + 20$$

$$35 = 20 \times 1 + 15$$

$$20 = 15 \times 1 + 5$$

$$15 = 5 \times 3 + 0$$

Le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide est 5, donc $a \wedge b = 5$.

2. Isolons les restes à chaque étape de l'algorithme d'Euclide :

$5 = 20 - 15$, $15 = 35 - 20$, $20 = 55 - 35$, $35 = 145 - 55 \times 2$; on a alors :

$$5 = 20 - (35 - 20) = -35 + 2 \times 20$$

$$5 = -35 + 2 \times (55 - 35) = -3 \times 35 + 2 \times 55$$

$$5 = -3 \times (145 - 55 \times 2) + 2 \times 55 = -3 \times 145 + 8 \times 55.$$

On a par exemple $a \times (-3) + b \times 8 = \delta$.

Exercice 4 :

1. On a $3 \times 8 = 24 = 1 + 23$, ou encore $3 \times 8 \equiv 1 [23]$.

Ainsi 3 est inversible modulo 23 et 8 est un de ses inverses.

2. Résolvons dans $\mathbb{Z}$ l'équation $3x \equiv 4 [23]$:

$$3x \equiv 4 [23] \Leftrightarrow 8 \times 3x \equiv 8 \times 4 [23] \Leftrightarrow x \equiv 32 [23] \Leftrightarrow x \equiv 9 [23].$$

On a donc $\mathcal{S} = \{9 + 23k, k \in \mathbb{Z}\}$.