

Correction : DS DE MATHEMATIQUES n° 4

Exercice 1 :

Le conseil régional dote un lycée de 20 nouveaux ordinateurs ; une étude montre qu'un ordinateur de ce type tombera en panne pendant la durée de garnatie avec une probabilité de 5 %. On suppose que ces ordinateurs sont tous du même type et qu'ils peuvent tomber en panne indépendamment les uns des autres. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre d'ordinateurs qui tombent en panne pendant la durée de garantie.
1. Soit l'épreuve de Bernoulli consistant à choisir un ordinateur au hasard.
Succès S : « l'ordinateur tombe en panne pendant la durée de garantie », $p(S) = 0,05$.
On répète cette épreuve 20 fois de suite de façon indépendante ; la V.A X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,05$; $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(20; 0.05)$.

2. Calculons la probabilté des événements suivants :

a. Exactement cinq ordinateurs tombent en panne durant la période de garantie :
$p(X = 5) = \binom{20}{5} \times 0,05^5 \times (1 - 0,05)^{15} \approx 0,002.$

b. Au moins un ordinateur tombe en panne durant la période de garantie :
$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{20}{0} \times 0,05^0 \times (1 - 0,05)^{20} \approx 0,642.$

c. Au plus sept ordinateurs tombent en panne durant la période de garantie :
$p(X \leqslant 7) \approx 0,999.$

3. $E(X) = 20 \times 0,05 = 1.$
En moyenne un ordinateur sur les vingt tombera en panne pendant la durée de garantie.

Exercice 2 :

X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre $n = 20$ et $p = 0,3$. A l'aide de la calculatrice , calculons les probabiltés suivantes :
1. $p(X = 4)$: binomFdp$(20, 0.3, 4)$ donne 0,1304.

2. $p(X \leqslant 7)$: binomFRep$(20, 0.3, 7)$ donne 0,7722.

3. $p(X > 9)$: $p(X > 9) = 1 - p(X \leqslant 9)$ et 1-binomFRep$(20, 0.3, 9)$ donne 0,0479.

4. $p(X \geqslant 3)$: $p(X \geqslant 3) = 1 - p(X \leqslant 2)$ et 1-binomFRep$(20, 0.3, 2)$ donne 0,9645.

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.
1. Déterminons la limite de f en $-\infty$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -3x^2 - 1 = -\infty\end{array}\right\} \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables ; $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0$ ou $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$.
$f'(x)$ est donc un trinôme du second degré dont les racines sont 0 et 1 ; $f'(x)$ est donc du signe de $a = 6$ sauf entre ses racines d'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

3. a. D'après le tableau de variation on constate que :
• sur $]-\infty; 1]$, f admet pour maximum -1 donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution ;
• sur $[1; +\infty[$, f est continue (car dérivable) et strictement croissante à valeurs dans $[-2; +\infty[$.
Or $0 \in [-2; +\infty[$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.

L'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

b. Avec la calculatrice, on trouve l'encadrement : $1,67 \leqslant \alpha \leqslant 1,68$.

c. On a donc le tableau de signe de $f(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 4 :

Résolvons sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :
1. $y' - 5y = 0$ avec $y(0) = -2$:
$y' - 5y = 0 \Leftrightarrow y' = 5y$: c'est une équation différentielle (ED) de la forme $y' = ay$ avec $a = 5$.
D'après le cours on sait que ses solutions sont les fonctions de la forme $f(x) = k\mathrm{e}^{ax} = k\mathrm{e}^{5x}$, $k \in \mathbb{R}$.
$y(0) = -2 \Leftrightarrow k\mathrm{e}^0 = -2 \Leftrightarrow k = -2$.
La solution cherchée est donc la fonction définie par $f(x) = -2\mathrm{e}^{5x}$.

2. $y' + 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow y' = -3y + 2$:
c'est une (ED) de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -3$ et $b = 2$.
D'après le cours on sait que ses solutions sont les fonctions de la forme $f(x) = k\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a} = k\mathrm{e}^{-3x} + \dfrac{2}{3}$, $k \in \mathbb{R}$.

L.M.A. Lycée Militaire Aix M. Hoarau