Correction : DS DE MATHEMATIQUES n° 3

Exercice 2 :

Soit x un entier relatif ; raisonnons sur les restes dans la division euclidienne de x par 3. On a le tableau suivant :

$x \equiv \ldots [3]$	0	1	2
$x^2 \equiv \ldots [3]$	0	1	1
$8x^2 \equiv \ldots [3]$	0	2	2

Par exemple : si $x \equiv 2\,[3]$ alors $x^2 \equiv 4\,[3]$; or $4 = 3 \times 1 + 1$, donc $x^2 \equiv 1\,[3]$.
On en déduit que $8x^2 \equiv 8\,[3]$, ou encore $8x^2 \equiv 2\,[3]$ car $8 = 3 \times 2 + 2$.

On a établi que les seuls restes possibles dans la division euclidienne de $8x^2$ par 3 sont 0 ou 2.

Or $16 = 1 + 3 \times 5$, ou encore $16 \equiv 1\,[3]$; par conséquent $8x^2 \equiv 16\,[3] \Leftrightarrow 8x^2 \equiv 1\,[3]$.
Cette derniére équation n'a donc aucune solution.

Exercice 3 :

Soit n un entier naturel.
1. Les diviseurs positifs de 15 étant 1, 3, 5 et 15, nous avons donc les cas suivants :
- $n + 3 = 1 \Leftrightarrow n = -2$ (ne convient pas car $n \in \mathbb{N}$)
- $n + 3 = 3 \Leftrightarrow n = 0$;
- $n + 3 = 5 \Leftrightarrow n = 2$;
- $n + 3 = 15 \Leftrightarrow n = 12$.

Les seuls entiers naturels n pour lesquels $(n + 3) \mid 15$ sont : 0, 2 et 12.

2. $(n + 3)(2n - 7) + 15 = 2n^2 - n - 21 + 15 = 2n^2 - n - 6$.

3. On en déduit que : $\dfrac{2n^2 - n - 6}{n + 3} = \dfrac{(n + 3)(2n - 7) + 15}{n + 3} = 2n - 7 + \dfrac{15}{n + 3}$.
Par conséquent, $\dfrac{2n^2 - n - 6}{n + 3}$ est un entier SSI $\dfrac{15}{n + 3}$ l'est soit aussi, ce qui signifie que $(n + 3) \mid 15$.
Ainsi $\dfrac{2n^2 - n - 6}{n + 3}$ est un entier pour $n \in \{0; 2; 12\}$.

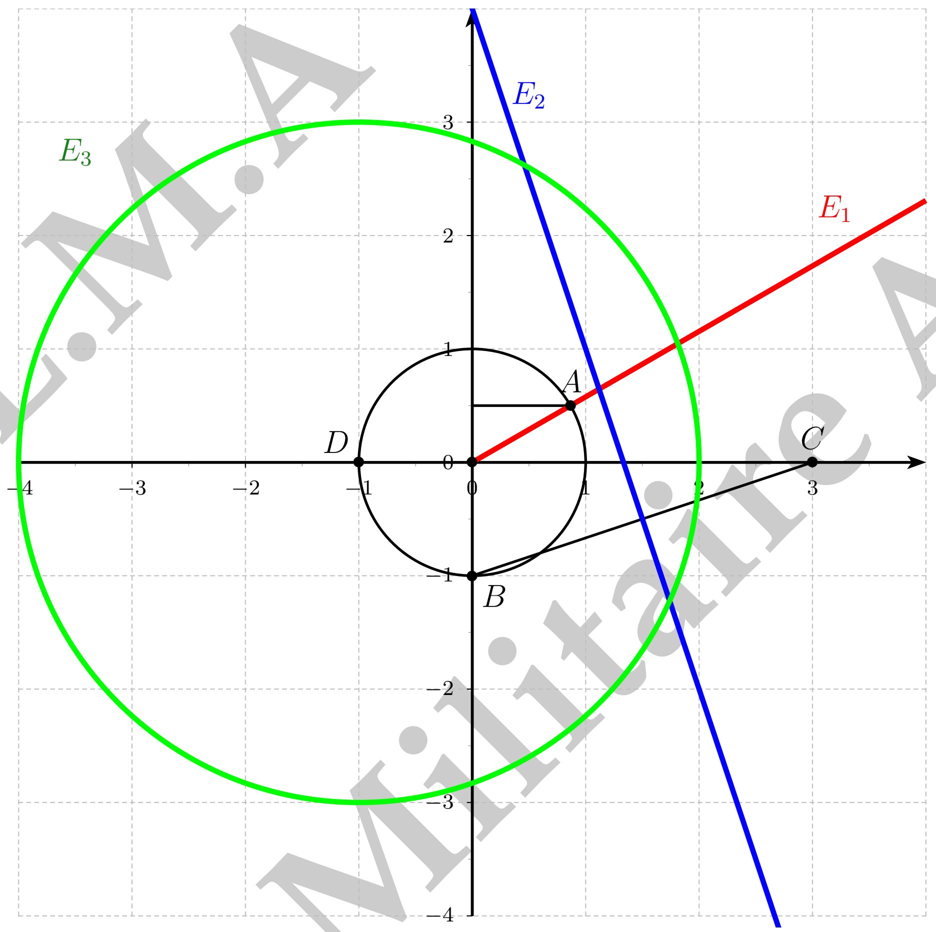
Exercice 4 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,, \overrightarrow{u}\,, \overrightarrow{v}\right)$, z désigne un nombre complexe.
Soit les ensembles suivants :
1. $E_1 = \{M(z), arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{6}\,[2\pi]\}$:

Soit le point A d'affixe $a = \cos\dfrac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.
Alors E_1 est la demie-droite $]OA)$.

2. $E_2 = \{M(z), |z + \mathrm{i}| = |z - 3|\}$:
$|z + \mathrm{i}| = |z - 3| \Leftrightarrow |z - (-\mathrm{i})| = |z - 3|$.
Soit les points B et C d'affixes respectives $b = -\mathrm{i}$ et $c = 3$; alors :
$|z - (-\mathrm{i})| = |z - 3| \Leftrightarrow MB = MC$; E_2 est donc la médiatrice du segment $[BC]$.

3. $E_1 = \{M(z), |z+1| = 3\}$:
$|z+1| = 3 \Leftrightarrow |z-(-1)| = 3$.
Soit le point D d'affixe $d = -1$, alors : $|z-(-1)| = 3 \Leftrightarrow DM = 3$.
E_3 est donc le cercle de centre D et de rayon 3.



Exercice 5 :

Considérons les nombres complexes $z_1 = 5 - 5\mathrm{i}$, $z_2 = -3 + 3\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_3 = -5\left(-\cos\frac{\pi}{7} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{7}\right)$.
Déterminons une écriture trigonométrique de :

• z_1 :
$|z_1| = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{2 \times 25} = 5\sqrt{2}$;
Ainsi $z_1 = 5 - 5\mathrm{i} = 5\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 5\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

• z_2 :
$|z_2| = \sqrt{(-3)^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{36} = 6$;
Ainsi $z_2 = -3 + 3\mathrm{i}\sqrt{3} = 6\left(\frac{-1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

• $\overline{z_2}$:
On sait que $|\overline{z_2}| = |z_2| = 6$ et $arg(\overline{z_2}) \equiv -arg(z_2)\,[2\pi]$, donc :
$\overline{z_2} = 6\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.

• $-z_1$:
On sait que $|-z_1| = |z_1| = 5\sqrt{2}$ et $arg(-z_1) \equiv arg(z_1) + \pi\,[2\pi]$, donc :
$-z_1 = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

• z_3 :
$z_3 = -5\left(-\cos\dfrac{\pi}{7} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{7}\right) = 5\left(\cos\dfrac{\pi}{7} - \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{7}\right)$
$= 5\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{7}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{7}\right)\right)$.