Lycée Militaire d'Aix — Année 2024 - 2025
Classe : TR math comp

Correction : DS DE MATHEMATIQUES n° 3

Exercice 1 :

Calculons les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} (-2x+3)^4$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} -2x+3=-\infty\\ \lim\limits_{X\to-\infty} X^4=+\infty\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x+3)^4=+\infty.$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{2x-3}$:

$\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{2x-3}=0.$

La droite d'équation $y=0$ est asymptote horizontale à la courbe de la fonction.

3. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+3}{x-2}$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^+} x+3=5\\ \lim\limits_{x\to2^+} x-2=0^+\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to2^+}\frac{x+3}{x-2}=+\infty \text{ (en effet } x>2\Rightarrow x-2>0).$$

La droite d'équation $x=2$ est asymptote verticale à la courbe de la fonction.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x-1$:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x-1=-1.$

La droite d'équation $y=-1$ est asymptote horizontale à la courbe de la fonction au voisinage de $-\infty$.

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

1. Montrons que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$:

• sur l'intervalle $[-1;+\infty[$ on constate que f admet -1 pour maximum, donc l'équation $f(x)=0$ n'admet aucune solution ;

• sur $]-\infty;-1]$, f est continue et strictement décroissante à valeurs dans $J=[-2;+\infty[$. Or $0\in J$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α.

L'équation $f(x)=0$ admet donc une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

2. On peut ainsi déterminer le signe de $f(x)$:

x	$-\infty$	α		-1		2		$+\infty$
f	$+\infty$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0		$-$				

Exercice 3 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x - 2$.

1. Calculons la limite de f en $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^x = +\infty, \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

On admet que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$.

2. Calculons la dérivée de f :

On a $f = u \times v - 2$ avec $\left\{\begin{array}{ll} u(x) & = x \\ u'(x) & = 1 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ll} v(x) & = \mathrm{e}^x \\ u'(x) & = \mathrm{e}^x \end{array}\right.$.

Donc $f' = u'v + uv'$, soit $f'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(x+1)$.

3. Comme $\mathrm{e}^x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x+1$; or $x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1$.
On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	-2	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-1} - 2$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$:
• sur l'intervalle $]-\infty; -1]$ on constate que $f(x) < -2$, donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution ;
• sur $[-1; +\infty[$, f est continue (car dérivable) et strictement croissante à valeurs dans $J = [-\mathrm{e}^{-1} - 2; +\infty[$.
Or $0 \in J$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.

L'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

5. A l'aide de la calculatrice on obtient l'encadrement : $0,85 < \alpha < 0,86$.

6. On peut ainsi déterminer le signe de $f(x)$:

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
f	-2	$\searrow$	$-2,3$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f(x)$		$-$			0	$+$	

Exercice 4 :

Résolvons sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :
1. $y' + 3y = 0 \Leftrightarrow y' = -3y$: c'est une équation différentielle (ED) de la forme $y' = ay$ avec $a = -3$.
D'après le cours on sait que ses solutions sont les fonctions de la forme $f(x) = ke^{ax} = ke^{3x}$, $k \in \mathbb{R}$.

2. $y' = 4y + 1$ avec $y(0) = 3$: c'est une (ED) de la forme $y' = ay + b$ avec $a = 4$ et $b = 1$.
D'après le cours on sait que ses solutions sont les fonctions de la forme $f(x) = ke^{ax} - \dfrac{b}{a} = ke^{4x} - \dfrac{1}{4}$, $k \in \mathbb{R}$.
$y(0) = 3 \Leftrightarrow ke^0 - \dfrac{1}{4} = 3 \Leftrightarrow k = 3 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{13}{4}$.
La solution cherchée est donc la fonction définie par $f(x) = \dfrac{13}{4}e^{4x} - \dfrac{1}{4}$.