Correction : DS DE MATHEMATIQUES n° 2

Exercice 1 :

Pour tout nombre complexe z on pose $Z = z - 2\text{i}\,\overline{z}$.
1. On pose $z = x + \text{i}y$, x et y étant réels ; alors :
$Z = x + \text{i}y - 2\text{i}(x - \text{i}y) = (x - 2y) + \text{i}(y - 2x)$ c.à.d $Re(Z) = x - 2y$ et $Im(Z) = y - 2x$.

2. $Z \in \text{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(Z) = 0 \Leftrightarrow x - 2y = 0 \Leftrightarrow x = 2y$.
Z est imaginaire pur SSI $z = 2y + \text{i}y$ avec $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 :

D'après le cours on sait qu'un entier est divisible par 3 ssi la somme de ses chiffres est divisible par 3. On a donc :
$\overline{63x4} \equiv 0\,[3] \Leftrightarrow 6 + 3 + x + 4 \equiv 0\,[3] \Leftrightarrow x \equiv -4\,[3] \Leftrightarrow x \equiv 2\,[3]$.
Mais $0 \leqslant x \leqslant 9$, les solutions sont donc $x = 2$, ou $x = 5$, ou $x = 8$.
En effet $6\,324 = 3 \times 2108$, $6\,354 = 3 \times 2118$, $6\,384 = 3 \times 2128$.

Exercice 3 :

On a $2\,973 = 12 \times 247 + 9$; en multipliant cette relation par -1 on obtient :
$-2\,973 = 12 \times (-247) - 9 = 12 \times (-247) - 12 + 12 - 9 = 12 \times (-247 - 1) + 3 = 12 \times (-248) + 3$.
Or $0 \leqslant 3 < 12$, donc dans la division euclidienne de $-2\,973$ par 12 le quotient est -248 et le reste 3.

Exercice 4 :

Soit n un entier naturel tel que $3n + 4$ divise $n + 6$.
1. Comme $(3n + 4) \mid (n + 6)$ alors $(3n + 4) \mid (3n + 18)$.
De plus $(3n + 4) \mid (3n + 4)$, donc $(3n + 4) \mid [(3n + 18) - (3n + 4)]$ soit $(3n + 4) \mid 14$.

2. Les diviseurs positifs de 14 sont 1, 2, 7 et 14 ; ce qui nous donne :
- $3n + 4 = 1 \Leftrightarrow n = -1$ impossible car $n \in \mathbb{N}$;
- $3n + 4 = 2 \Leftrightarrow 3n = -2$ impossible car $n \in \mathbb{N}$;
- $3n + 4 = 7 \Leftrightarrow n = 1$;
- $3n + 4 = 14 \Leftrightarrow 3n = 10$ impossible car $n \in \mathbb{N}$;

La seule valeur possible de n est 1.

3. Pour $n = 1$, $3n + 4 = 7$ et $n + 6 = 7$. On a bien $3n + 4$ divise $n + 6$.
$n = 1$ est donc l'unique solution au problème.

Exercice 5 :

Déterminons les entiers relatifs n tels que $n^2 - 3n + 6$ soit divisible par 5.
Pour cela raisonnons par disjonction des cas suivant les restes dans la division euclidienne de n par 5 ; on a le tableau suivant :

$n \equiv \ldots\,[5]$	0	1	2	3	4
$n^2 \equiv \ldots\,[5]$	0	1	4	4	1
$-3n + 6 \equiv \ldots\,[5]$	1	3	0	2	4
$n^2 - 3n + 6 \equiv \ldots\,[6]$	1	4	4	1	0

On constate que $n^2 - 3n + 6 \equiv 0\,[5]$ ssi $n \equiv 4\,[5]$.
L'ensemble des solutions est donc $\mathscr{S} = \{4 + 5k, k \in \mathbb{Z}\}$.