Correction : DS DE MATHEMATIQUES n° 2

Exercice 1 :

Résolvons les équations et inéquations suivantes :

1. $(e^{2-x})^4 = 1 \Leftrightarrow e^{8-4x} = e^0 \Leftrightarrow 8 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 2.$

Ainsi $\mathcal{S} = \{2\}.$

2. $e^{5x+2} \times e^{-2x+3} = 1 \Leftrightarrow e^{3x+5} = e^0 \Leftrightarrow 3x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}.$

Ainsi $\mathcal{S} = \left\{-\frac{5}{3}\right\}.$

3. $e^{7-x} < 2 \Leftrightarrow e^{7-x} < e^{\ln 2} \Leftrightarrow 7 - x < \ln 2 \Leftrightarrow 7 - \ln 2 < x.$

Ainsi $\mathcal{S} =]7 - \ln 2; +\infty[.$

Exercice 2 :

Calculons la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (x^3 - 1)^2 :$

on a $f = u^2$ avec $\begin{cases} u(x) = x^3 - 1 \\ u'(x) = 3x^2 \end{cases}$; par conséquent $f' = 2u'u.$

On obtient ainsi $f'(x) = 2 \times 3x^2 \times (x^3 - 1) = 6x^2(x^3 - 1).$

2. $f(x) = e^{5-4x} :$

on a $f = e^u$ avec $\begin{cases} u(x) = 5 - 4x \\ u'(x) = -4 \end{cases}$; par conséquent $f' = u' e^u.$

On obtient ainsi $f'(x) = -4 e^{5-4x}.$

3. $f(x) = \frac{x^2}{2+x} :$

on a $f = \frac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ u'(x) = 2x \end{cases}$ et $\begin{cases} v(x) = 2+x \\ v'(x) = 1 \end{cases}.$

Par conséquent $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, soit $f'(x) = \frac{2x(2+x) - x^2}{(2+x)^2} = \frac{x^2 + 4x}{(2+x)^2}.$

Exercice 3 :

Résolvons sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' = 3y + 1$: c'est une équation différentielle (ED) de la forme $y' = ay + b$ avec $a = 3$ et $b = 1.$

D'après le cours on sait que ses solutions sont les fonctions de la forme $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a} = ke^{3x} - \frac{1}{3}, k \in \mathbb{R}.$

2. $y' + 2y - 4 = 0$ avec $y(0) = -1$: $y' + 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow y' = -2y + 4.$

C'est une ED de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -2$ et $b = 4.$

D'après le cours on sait que ses solutions sont les fonctions de la forme $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a} = ke^{-2x} + 2,$
 $k \in \mathbb{R}.$

$y(0) = -1 \Leftrightarrow k + 2 = -1 \Leftrightarrow k = -3.$

La solution cherchée est donc la fonction définie par $f(x) = -3e^{-2x} + 2.$

Exercice 4 :

On injecte à un patient une dose de 3 cm^3 d'un médicament. On modélise la quantité de médicament

présente dans le sang par une fonction f , dérivable sur $\mathbb{R}^+$, vérifiant pour tout $t \geq 0$: $f'(t) = -0,07f(t)$.
 $f(t)$ représente la quantité de médicament dans le sang, exprimée en cm^3 , t heures après l'injection.

1. $f(0)$ est la quantité de médicament dans le sang après l'injection, donc $f(0) = 3$.

2. $y' = -0,07y$ est une ED de la forme $y' = ay$ avec $a = -0,07$; d'après le cours on sait que ses solutions sont les fonctions de la forme $f(t) = ke^{at} = ke^{-0,07t}$, $k \in \mathbb{R}$.

Or $f(0) = 3 \Leftrightarrow k = 3$; ainsi $f(t) = 3e^{-0,07t}$.

3. La quantité de médicament présente dans le sang 10 heures après l'injection est :

$$f(10) = 3e^{-0,7} \approx 1,49 \text{ cm}^3.$$

L.M.A.
Lycée Militaire Aix
M. Hoarau