Correction : DS DE MATHEMATIQUES n° 1

Exercice 2 :

Soit les nombres complexes $z_1 = 2 - 3\text{i}$ et $z_2 = 5 + \text{i}$.
Cherchons l'écriture algébrique de :
1. $z_1 + \text{i}z_2 = 2 - 3\text{i} + \text{i}(5 + \text{i}) = 2 - 3\text{i} + 5\text{i} + \text{i}^2 = 2 + 2\text{i} - 1 = 1 + 2\text{i}$.

2. $z_1 \times z_2 = (2 - 3\text{i})(5 + \text{i}) = 10 + 2\text{i} - 15\text{i} - 3\text{i}^2 = 10 - 13\text{i} + 3 = 13 - 13\text{i}$.

3. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2 - 3\text{i}}{5 + \text{i}} = \dfrac{(2 - 3\text{i})(5 - \text{i})}{(5 + \text{i})(5 - \text{i})} = \dfrac{10 - 2\text{i} - 15\text{i} + 3\text{i}^2}{25 - \text{i}^2} = \dfrac{7 - 17\text{i}}{26} = \dfrac{7}{26} - \dfrac{17}{26}\text{i}$.

4. $\overline{z_1}^2 = (2 + 3\text{i})^2 = 4 + 12\text{i} - 9 = -5 + 12\text{i}$.

Exercice 3 :

Résolvons dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
1. $(-1 + 2\text{i})z = 3 - \text{i} \Leftrightarrow z = \dfrac{3 - \text{i}}{-1 + 2\text{i}} = \dfrac{(3 - \text{i})(-1 - 2\text{i})}{5} = -1 - \text{i}$.
Ainsi $\mathscr{S} = \{-1 - \text{i}\}$.

2. $z + 2\overline{z} - 1 = 4\text{i}$: posons $z = x - \text{i}y$ avec x et y réels; alors $\overline{z} = x - \text{i}y$.
$z + 2\overline{z} - 1 = 4\text{i} \Leftrightarrow x + \text{i}y + 2(x - \text{i}y) - 1 = 4\text{i} \Leftrightarrow (3x - 1) - \text{i}y = 0 + 4\text{i}$.
On sait que deux nombres complexes sont égaux SSI ils ont même partie réelle et même partie imaginaire; on a donc :
$\begin{cases} 3x - 1 = 0 \\ -y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = -4 \end{cases}$; ainsi $\mathscr{S} = \{\dfrac{1}{3} - 4\text{i}\}$.

3. $\dfrac{z - 1}{z - 2\text{i}} = 1 - \text{i}$; condition : $z \neq 2\text{i}$.
$\dfrac{z - 1}{z - 2\text{i}} = 1 - \text{i} \Leftrightarrow (z - 1) = (z - 2\text{i})(1 - \text{i}) \Leftrightarrow z(1 - 1 + \text{i}) = 1 - 2\text{i}(1 - \text{i})$
$\Leftrightarrow \text{i}z = -1 - 2\text{i} \Leftrightarrow z = \dfrac{-1 - 2\text{i}}{\text{i}} = \dfrac{(-1 - 2\text{i})(-\text{i})}{1} = -2 + \text{i}$.
Ainsi $\mathscr{S} = \{-2 + \text{i}\}$.

Exercice 4 :

Déterminons l'écriture algébrique de $(2 - \text{i})^4$; à l'aide du binôme de newton on a :
$(2 - \text{i})^4 = (2 + (-\text{i}))^4$
$= \dbinom{4}{0} 2^4(-\text{i})^0 + \dbinom{4}{1} 2^3(-\text{i})^1 + \dbinom{4}{2} 2^2(-\text{i})^2 + \dbinom{4}{3} 2^1(-\text{i})^3 + \dbinom{4}{4} 2^0(-\text{i})^4$
$= 1 \times 16 + 4 \times 8 \times (-\text{i}) + 6 \times 4 \times (-1) + 4 \times 2 \times (\text{i}) + 1 \times 1 \times 1$
$= 16 - 32\text{i} - 24 + 8\text{i} + 1 = -7 - 24\text{i}$.