Correction : DM DE MATHEMATIQUES n° 1

Exercice 1 : ex 119 p 36

z désigne un nombre complexe ; on pose $Z = z - \mathrm{i}$ et $Z' = \overline{z} - 1$.

1. Dans cette question on prend $z = \dfrac{1}{4}(3 + \mathrm{i})$.

Alors $Z = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\mathrm{i} - \mathrm{i} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{3}{4}\mathrm{i} = \dfrac{3}{4}(1 - \mathrm{i})$ et $Z' = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4}\mathrm{i} - 1 = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\mathrm{i} = \dfrac{-1}{4}(1 + \mathrm{i})$.

D'où $ZZ' = \dfrac{3}{4}(1 - \mathrm{i}) \times \dfrac{-1}{4}(1 + \mathrm{i}) = \dfrac{-3}{16}(1 - \mathrm{i}^2) = \dfrac{-3}{16} \times 2 = -\dfrac{3}{8}$.

On constate que ZZ' est un nombre réel.

2. On note $z = x + \mathrm{i}y$, x et y étant des réels.

a. Déterminons l'écriture algébrique de ZZ' :

$ZZ' = (x + \mathrm{i}y - \mathrm{i})(x - \mathrm{i}y - 1) = [x + \mathrm{i}(y - 1)] \times [(x - 1) - \mathrm{i}y]$

$= [x(x - 1) + y(y - 1)] + \mathrm{i}\,[-xy + (y - 1)(x - 1)]$

$= (x^2 - x + y^2 - y) + \mathrm{i}(-x - y + 1)$.

b. $ZZ' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(ZZ') = 0 \Leftrightarrow -x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1 - x$.

Ainsi ZZ' est un réel SSI $z = x + \mathrm{i}(1 - x)$ avec $x \in \mathbb{R}$.

Remarque : pour $z = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\mathrm{i}$ on a $x = \dfrac{3}{4}$ et $y = \dfrac{1}{4} = 1 - x$; il est donc normal d'avoir trouvé ZZ' réel à la question 1.