Correction : DS n° 5

Exercice 1 :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

1. $\dfrac{5}{2-x} \leqslant 1$.

❶ Condition : $2-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ donc $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

❷ $\dfrac{5}{2-x} \leqslant 1 \Leftrightarrow \dfrac{5}{2-x} - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{5-(2-x)}{2-x} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{3+x}{2-x} \leqslant 0$.

• signe du numérateur : $3+x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -3$

• signe du dénominateur : $2-x \geqslant 0 \Leftrightarrow 2 \geqslant x$

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$3+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
Quotient		$-$	0	$+$		$-$	

On a donc $\mathscr{S} =]-\infty; -3] \cup]2; +\infty[$.

2. $9-(3x-1)^2 > 0 \Leftrightarrow 3^2-(3x-1)^2 > 0 \Leftrightarrow (3-3x+1)(3+3x-1) > 0 \Leftrightarrow (4-3x)(3x+2) > 0$:

• signe de $4-3x$: $4-3x \geqslant 0 \Leftrightarrow 4 \geqslant 3x \Leftrightarrow \dfrac{4}{3} \geqslant x$

• signe du $3x+2$: $3x+2 \geqslant 0 \Leftrightarrow 3x \geqslant -2 \Leftrightarrow x \geqslant -\dfrac{2}{3}$

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$4-3x$		$+$		$+$	0	$-$	
$3x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
Produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $\mathscr{S} = \left]-\dfrac{2}{3}; \dfrac{4}{3}\right[$.

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)^2 - 5$.

1. Développons l'expression de $f(x)$:
$f(x) = (2x-1)^2 - 5 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 1 + 1^2 - 5 = 4x^2 - 4x - 4$.

2. $f(-3) = (2 \times (-3) - 1)^2 - 5 = (-7)^2 - 5 = 49 - 5 = 44$.
L'image de -3 par f est 44.

3. Les antécédents de -9 par f sont les solutions de $f(x) = -9$:
$f(x) = -9 \Leftrightarrow (2x-1)^2 - 5 = -9 \Leftrightarrow (2x-1)^2 = -4$.
Impossible car un carré est toujours positif ; -9 n'a pas d'antécédent par f.

Exercice 3 :

1. $D_f = [-4; +\infty[$.

2. $f(-4) = -3$ et $f(2) = -4$.

3. Les antécédents de -2 par f sont $-3,7$; 0 ; $3,4$.

4. Les solutions de $f(x) = 3$ sont $\mathcal{S} = \{4,5\}$.

5. Les solutions de l'inéquation $f(x) > -1$ sont $\mathcal{S} =]-3,4; -0,5[\cup]3,7; +\infty[$.

6. Le tableau de signe de $f(x)$:

x	-4		-3		-1		4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Exercice 4 :

1. Le prix d'un article subit une hausse de 19 % puis une baisse de 28 %.
Notons P le prix initial de l'article et P' le prix final ; on a alors :
$P' = P \times \left(1 + \dfrac{19}{100}\right) \times \left(1 - \dfrac{28}{100}\right)$
$\Rightarrow P' = P \times 1,19 \times 0,72$
$\Rightarrow P' = P \times 0,8568$
$\Rightarrow P' = P \times \left(1 - \dfrac{14,32}{100}\right)$
Globalement le prix a subi une baisse de 14,32 %.

2. Déterminons l'évolution réciproque d'une hausse de 23 % :
notons Q la quantité de départ et C_M le coefficient multiplicateur correspondant à l'évolution réciproque.
On a alors :
$Q \times \left(1 + \dfrac{23}{100}\right) \times C_M = Q$
$\Rightarrow Q \times 1,23 \times C_M = Q$
$\Rightarrow 1,23 \times C_M = 1$
$\Rightarrow C_M = \dfrac{1}{1,23} = 0,813 = 1 - \dfrac{18,7}{100}$
C'est donc une baisse de 18,7 % qui permet de compenser une hausse de 23 %.