Correction : DS n° 3

Exercice 1 :

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)(x-2) - (x-2)(x+4)$.
1. $f(-3) = (-6+1) \times (-3-2) - (-3-2) \times (-3+4) = (-5) \times (-5) - (-5) \times 1 = 25 + 5 = 30$.
L'image de -3 par f est 30.

2. $f(x) = (2x+1)(x-2) - (x-2)(x+4) = (x-2)[(2x+1) - (x+4)] = (x-2)(x-3)$.

3. Les antécédents de 0 par f sont les réels x vérifiant $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow (x-2)(x-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ ou } x - 3 = 0 \; \clubsuit \\ &\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 3 \end{aligned}$$

$\clubsuit$ un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul

Les antécédents de 0 par f sont donc 2 et 3.

4. On a : $f(1) = 1^2 - 5 \times 1 + 6 = 2$; comme $f(1) \neq 3$, on peut affirmer que $A(1;3) \notin \mathscr{C}_f$.

Exercice 2 :

1. Développons $A = (3x-2)^2$:
On sait que $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, d'où :
$A = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 2 + 2^2 = 9x^2 - 12x + 4$.

2. Factorisons les expressions suivantes :

a. $B = (2x+5)^2 - (x+2)^2 = [(2x+5) - (x+2)]\,[(2x+5) + (x+2)]$
$= (2x + 5 - x - 2)(2x + 5 + x + 2)$
$= (x+3)(3x+7)$.
En effet $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

b. $C = 4x^2 + 4x + 1 + 2(2x+1)(x-1) = (2x+1)^2 + 2(2x+1)(x-1)$
$= (2x+1)(2x+1) + 2(2x+1)(x-1) = (2x+1)\,[(2x+1) + 2(x-1)]$
$= (2x+1)(2x+1+2x-2) = (2x+1)(4x-1)$.
En effet $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$.

c. $D = 4(5x-3)^2 - 3(5x-3)(x+1) = 4(5x-3)(5x-3) - 3(5x-3)(x+1)$
$= (5x-3)\,[4(5x-3) - 3(x+1)] = (5x-3)(20x - 12 - 3x - 3) = (5x-3)(17x-15)$.

Exercice 3 :

Résolvons les équations suivantes :
1. On a :

$$\begin{aligned} (x+7)^2 - (x+7)(4x-3) = 0 &\Leftrightarrow (x+7)(x+7) - (x+7)(4x-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+7)\,[(x+7) - (4x-3)] = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+7)(x+7-4x+3) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+7)(-3x+10) = 0 \quad \clubsuit \\ &\Leftrightarrow x + 7 = 0 \text{ ou } -3x + 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -7 \text{ ou } x = \frac{10}{3} \qquad \mathscr{S} = \left\{-7; \frac{10}{3}\right\} \end{aligned}$$

$\clubsuit$ Un produit de facteurs est nul SSI l'un au moins de ses facteurs l'est.

2. $\dfrac{4-x}{2x+1}=-4$.

Condition : $2x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -\dfrac{1}{2}$ donc $D=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

$\dfrac{4-x}{2x+1}=-4 \Leftrightarrow \dfrac{4-x+4(2x+1)}{2-x}=0 \Leftrightarrow 4-x+8x+4=0 \Leftrightarrow 7x=-8 \Leftrightarrow x=-\dfrac{8}{7}$

$\mathscr{S}=\left\{-\dfrac{8}{7}\right\}$.

Exercice 4 :

Soit a et b deux réels strictement supérieurs à -1 tels que $a>b$.

On pose $A=\dfrac{-2}{a+1}$ et $B=\dfrac{-2}{b+1}$.

1. Comme $a>-1$ alors $a+1>0$; ainsi $a+1$ est strictement positif.

De même $b>-1$ alors $b+1>0$; ainsi $b+1$ est strictement positif.

2. $A-B=\dfrac{-2}{a+1}+\dfrac{2}{b+1}=\dfrac{-2(b+1)+2(a+1)}{(a+1)(b+1)}=\dfrac{-2b+2a}{(a+1)(b+1)}=\dfrac{2(a-b)}{(a+1)(b+1)}$.

3. Pour comparer A et B, étudions le signe de leur différence $A-B=\dfrac{2(a-b)}{(a+1)(b+1)}$:

On sait que :

- $a>b \Rightarrow a-b>0$
- $a+1$ et $b+1$ sont strictement positifs donc $(a+1)(b+1)>0$.

Ainsi $A-B>0 \Rightarrow A>B$.

4. Sans effectuer de calculs comparons $\dfrac{-2}{5,46}$ et $\dfrac{-2}{5,44}$:

Posons $a=4,46$ et $b=4,44$; alors $\dfrac{-2}{5,46}=\dfrac{-2}{a+1}=A$ et $\dfrac{-2}{5,44}=\dfrac{-2}{b+1}=B$.

Comme $a>b$ et a et b sont strictement supérieurs à -1, d'après la question précédente on peut affirmer que $\dfrac{-2}{5,46}>\dfrac{-2}{5,44}$.