Correction : DS n° 3

Exercice 1 :

Dans un repère (O, I, J) soient les points $A(2;1)$, $B(7;1)$, $C(3;3)$ et $D(x;y)$.

1. $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A; y_B - y_A) \Rightarrow \overrightarrow{AB}\,(5;0)$ et $\overrightarrow{DC}\,(3-x; 3-y)$.

2. on a :
$ABCD$ est un parallélogramme
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont les mêmes coordonnées ·
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-x=5 \\ 3-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3-5 = -2 \\ y = 3 \end{cases}$$
Donc $D(-2;3)$.

Exercice 2 :

a et b sont deux entiers tels que a est pair et b impair. Déterminons la parité de :

1. $a + b^2$:
b est impair donc b^2 est impair ; a et b^2 sont de parité différente donc $a + b^2$ est impair.

2. $3a + 4b$:
Comme a est un entier pair il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k$; b étant un entier impair il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $b = 2k' + 1$.
Alors $3a + 4b = 3(2k) + 2 \times 2(2k' + 1) = 2\,[3k + 2(2k' + 1)]$.
Or $3k + 2(2k' + 1)$ est un entier, donc $3a + 4b$ est pair.

Exercice 3 :

On considère les points $A(-3;4)$, $B(5;2)$, $C(7;y)$, $D(1;5)$ et $E(10;2)$.

1. $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A; y_B - y_A) \Rightarrow \overrightarrow{AB}\,(8;-2)$; de même $\overrightarrow{AC}\,(10; y-4)$.

Les points A, B et C soient alignés ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ; or :
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires $\Leftrightarrow 8(y-4) + 20 = 0 \Leftrightarrow y - 4 = -\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow y = \dfrac{3}{2}$.

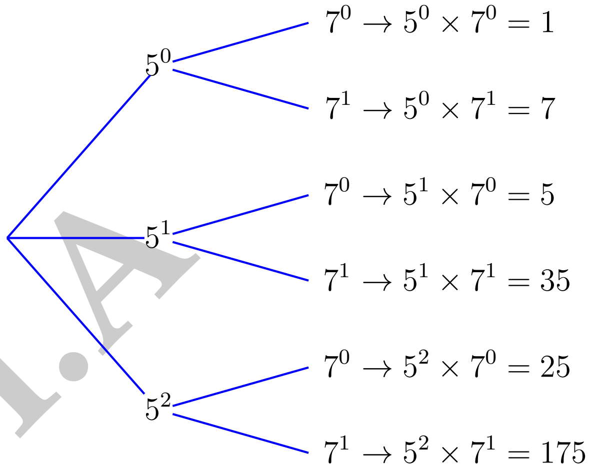
Les points A, B et C soient alignés ssi $y = \dfrac{3}{2}$.

2. On sait que $\overrightarrow{AB}\,(8;-2)$, et on obtient $\overrightarrow{DE}\,(9;-3)$.
$det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}) = 8 \times (-3) - 9 \times (-2) = -27 + 18 = -9$.
Comme leur déterminant n'est pas nul, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites (AB) et (DE) ne sont pas parallèles.

3. Notons $(x;y)$ les coordonnées de F ; alors $\overrightarrow{AF}\,(x+3; y-4)$ et $-3\overrightarrow{AB}\,(-24;6)$.
Ces vecteurs étant égaux leurs coordonnées doivent être égales, ce qui donne :
$$\begin{cases} x+3 = -24 \\ y-4 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -27 \\ y = 10 \end{cases}$$
Ainsi $F(-27;10)$.

Exercice 4 :

On a $175 = 5 \times 35 = 5 \times 5 \times 7 = 5^2 \times 7$.
Pour trouver ses diviseurs positifs on peut construire un arbre :



Les diviseurs positifs de 175 sont donc : 1 ; 5 ; 7 ; 25 ; 35 ; 175.