Correction : DM n° 3

Exercice 1 : (exercice 123 p 87)

Soit a et b deux réels strictement positifs ; leur moyenne arithmétique est $m = \dfrac{a+b}{2}$ et leur moyenne harmonique est $h = \dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$.

1. $h = \dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} = \dfrac{2}{\dfrac{b+a}{ab}} = 2 \times \dfrac{ab}{a+b} = \dfrac{2ab}{a+b}$.

2. $m - h = \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{2ab}{a+b} = \dfrac{(a+b)^2 - 4ab}{2(a+b)} = \dfrac{a^2+2ab+b^2-4ab}{2(a+b)} = \dfrac{a^2-2ab+b^2}{2(a+b)} = \dfrac{(a-b)^2}{2(a+b)}$.

3. Pour comparer m et h on étudie le signe de leur différence. or :
- $(a-b)^2 \geqslant 0$ car le carré d'un réel est toujours positif ;
- $2(a+b) > 0$ car 2, a et b sont strictement positifs ;

ainsi $\dfrac{(a-b)^2}{2(a+b)} \geqslant 0 \Leftrightarrow m - h \geqslant 0 \Leftrightarrow m \geqslant h$.

La moyenne arithmétique de deux réels strictement positifs est donc supérieur à leur moyenne harmonique.