

1. Nombre dérivé et tangente.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , a et $a + h$ deux réels distincts de I .

On appelle **taux d'accroissement** de f entre a et $a + h$ le quotient $\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$. On dit que f est **dérivable** en a quand son taux d'accroissement $\tau(h)$ entre a et $a + h$ admet une limite finie quand h tend vers 0.

Quand cette limite est finie on l'appelle **nombre dérivé** de f en a , et on la note $f'(a)$.

$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a ; on a donc :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$(T) : y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$$

2. Fonction dérivée.

Lorsque f admet un nombre dérivé en chacun des réels de l'intervalle I on dit qu'elle est dérivable sur I ; on appelle **fonction dérivée** de f , notée f' , la fonction qui à tout réel $x \in I$ associe le nombre dérivé de f en x . Soit $f' : x \mapsto f'(x)$.

3. Dérivées des fonctions usuelles.

Soient k, a, b trois réels et n un entier naturel non nul.

Fonction f	Fonction dérivée f'	Dérivable sur
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$

4. Formules de dérivation.

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I (avec $v(x) \neq 0$), et k un réel. Alors :

$$(k \times u)' = k \times u'$$

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \times v)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

5. Application : étude des variations d'une fonction.

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Si :

- ♣ $f'(x) = 0$ sur I alors f est constante sur I .
- ♣ $f'(x) \geq 0$ sur I alors f est croissante sur I .
- ♣ $f'(x) \leq 0$ sur I alors f est décroissante sur I .

Plan d'étude d'une fonction :

Pour étudier une fonction f on :

1. recherche son ensemble de définition;
2. calcule sa dérivée;
3. étudie le signe de sa dérivée;
4. résume les variations de f dans un tableau de variations;
5. construit $\mathcal{C}_f$.