CORRECTION : DS $n°5$

Exercice 1 :

Calculons la dérivée des fonctions définies par :

1. $f(x) = x^4\sqrt{x}$:

$f = u \times v$ avec $\begin{cases} u(x) = x^4 \\ u'(x) = 4x^3 \end{cases}$ et $\begin{cases} v(x) = \sqrt{x} \\ v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$.

Alors $f' = u'v + uv'$, soit $f'(x) = 4x^3 \times \sqrt{x} + x^4 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{8x^4 + x^4}{2\sqrt{x}} = \dfrac{9x^4}{2\sqrt{x}}$.

2. $f(x) = \dfrac{x}{5 - x}$:

$f = \dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} v(x) = 5 - x \\ v'(x) = -1 \end{cases}$.

Alors $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, soit $f'(x) = \dfrac{(5 - x) - x \times (-1)}{(5 - x)^2} = \dfrac{5}{(5 - x)^2}$.

Exercice 2 :

Une entreprise produit du tissu. Le coût total de production (en euro) de l'entreprise est modélisé par la fonction

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750$$

où x est la longueur de tissu fabriqué exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10.
Chaque kilomètre de tissu est vendu 680 euros.
On note $B(x)$ le bénéfice de l'entreprise, c.à.d la différence entre la recette et le coût de production, pour la vente de x kilomètres de tissu.

1. Le bénéfice de l'entreprise pour la vente de 3 kilomètres de tissu est :
$B(3) = 680 \times 3 - C(3) = 2\,040 - 1\,575 = 465$ euros.

2. On a $B(x) = 680x - C(x) = 680x - 15x^3 + 120x^2 - 500x - 750 = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 750$.

3. La fonction B est dérivable comme somme de fonctions dérivables, on a :
$B'(x) = -15 \times 3x^2 + 120 \times 2x + 180 = -45x^2 + 240x + 180$.

4. B' est une fonction polynôme de degré 2 avec avec $a = -45$, $b = 240$ et $c = 180$.
On a $\Delta = b^2 - 4ac = 90\,000$; ce polynôme admet donc deux racines :
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 6$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -\dfrac{2}{3}$.
On sait que $B'(x)$ est du signe de $a = -45$ sauf entre ses racines.
On peut donc dresser le tableau de signes de $B'(x)$ sur $[0\ ;\ 10]$ puis le tableau de variations de B.

x	0		6		10
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
B	-750	$\nearrow$	1410	$\searrow$	-1950

5. L'entreprise doit produire 6 km de tissu afin d'obtenir un bénéfice maximal 1 410 euros.

Exercice 3 :

Soit le cercle $\mathscr{C}$ d'équation $x^2+y^2+2x-6y+5=0$ et le point $A(0;5)$.

1. Déterminons le centre et le rayon de $\mathscr{C}$:

$$\begin{aligned} & x^2+y^2+2x-6y+5=0 \\ \Leftrightarrow\ & {\color{red}x^2+2x}+{\color{blue}y^2-6y}+5=0 \\ \Leftrightarrow\ & {\color{red}(x+1)^2-1}+{\color{blue}(y-3)^2-9}+5=0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-(-1))^2+(y-3)^2=5 \end{aligned}$$

C'est l'équation du cercle de centre $\Omega\,(-1;3)$ et de rayon $R=\sqrt{5}$.

2. On a $x_A^2+y_A^2+2x_A-6y_A+5=0+25+0-30+5=0$; les coordonnées de A vérifient l'équation de $\mathscr{C}$, donc $A\in\mathscr{C}$.

3. Déterminons l'équation de la tangente (T) en A au cercle $\mathscr{C}$:

$$\begin{aligned} M(x;y)\in(T) \ & \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{A\Omega} \text{ orthogonaux avec } \overrightarrow{AM}\,(x;y-5) \text{ et } \overrightarrow{A\Omega}\,(-1;-2) \\ & \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\ .\ \overrightarrow{A\Omega}=0 \\ & \Leftrightarrow -1\times x-2(y-5)=0 \\ & \Leftrightarrow -x-2y+10=0 \end{aligned}$$

Exercice 4 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$, on considére la droite (d) : $2x+3y-1=0$ et les points $A(2;1)$ et $B(4;-3)$.

1. Déterminons une équation cartésienne de la médiatrice de $[AB]$:

• Soit I milieu de $[AB]$: $x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{2+4}{2}=3$ et $y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{1-3}{2}=-1$.

Donc $I(3;-1)$.

• Soit (Δ) la médiatrice de $[AB]$:

$$\begin{aligned} M(x;y)\in(\Delta) \ & \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y+1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ sont orthogonaux} \\ & \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}\ .\ \overrightarrow{AB}=0 \\ & \Leftrightarrow 2(x-3)-4(y+1)=0 \\ & \Leftrightarrow (x-3)-2(y+1)=0 \\ & \Leftrightarrow x-2y-5=0 \end{aligned}$$

2. Soit (d') la perpendiculaire à (d) passant par B :

(d) : $2x+3y-1=0$ admet $\vec{n}\,(2;3)$ pour vecteur normal.

$$\begin{aligned} M(x;y)\in(d') \ & \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-4 \\ y+3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires} \\ & \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{BM}\ ,\ \vec{n}\right)=0 \\ & \Leftrightarrow 3(x-4)-2(y+3)=0 \\ & \Leftrightarrow 3x-2y-18=0 \end{aligned}$$