CORRECTION : DS $n°4$

Exercice 1 :

Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AB = 7$, $AD = 4$ et $\widehat{BAD} = \dfrac{\pi}{3}$.

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AD}\| \times \cos \widehat{BAD} = 7 \times 4 \times \dfrac{1}{2} = 14$.

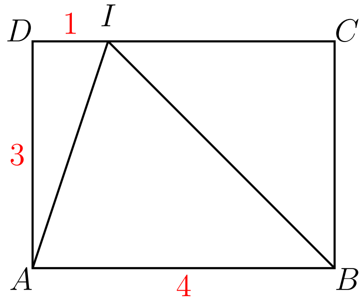
2. Comme $ABCD$ un parallélogramme, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

3. On a alors :

$\overrightarrow{AC}^{\,2} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)^2 = \overrightarrow{AB}^{\,2} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}^{\,2} = 7^2 + 2 \times 14 + 4^2 = 93$.

Mais on sait aussi que $\overrightarrow{AC}^{\,2} = AC^2$; on en déduit que $AC^2 = 93$ donc $AC = \sqrt{93}$.

Exercice 2 :



1. D'aprés le théoréme de Pythagore dans le triangle rectangle DIA on a :
$IA^2 = ID^2 + DA^2 = 1^2 + 3^2 = 10$ donc $IA = \sqrt{10}$.
On calcule de même la longueur IB dans le triangle IBC, $IB = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

2. Par bilinéarité du produit scalaire on a :

$$\begin{aligned}
& \left(\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CB}\right) \\
= \; & \overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB} \\
= \; & \overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{IC} + 0 + 0 + \overrightarrow{DA}^{\,2} \\
= \; & \overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{IC} + DA^2
\end{aligned}$$

en effet, comme les vecteurs $\overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{CB}$ étant orthogonaux, on a $\overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$; de même $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{IC} = 0$.

3. a. D'aprés la relation de Chasles, l'égalité ci-dessus s'écrit :

$\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{IC} + DA^2 = \|\overrightarrow{ID}\| \times \|\overrightarrow{IC}\| \times \cos(\pi) + DA^2 = 1 \times 3 \times (-1) + 3^2 = 6$.

b. Mais on a aussi :

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = \|\overrightarrow{IA}\| \times \|\overrightarrow{IB}\| \times \cos(\widehat{AIB}) \\
\Leftrightarrow \quad & 6 = \sqrt{10} \times \sqrt{18} \times \cos(\widehat{AIB}) \\
\Leftrightarrow \quad & \cos(\widehat{AIB}) = \frac{6}{\sqrt{180}} = \frac{6}{6\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

On en déduit que $\widehat{AIB} \approx 63,43°$.

Exercice 3 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{2+x}$.

1. Calculons son taux d'accroissement entre 1 et $1+h$ avec $h \in \mathbb{R}^*$:

$$\tau = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\dfrac{1+h}{3+h} - \dfrac{1}{3}}{h} = \frac{1}{h} \times \frac{3(1+h) - (3+h)}{3(3+h)} = \frac{2h}{3h(3+h)} = \frac{2}{3(3+h)}.$$

2. On a $\lim\limits_{h\to 0}\tau = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2}{3(3+h)} = \dfrac{2}{9}$.

Cette limite étant finie, f est dérivable en 1 avec $f'(1) = \dfrac{2}{9}$.

3. On a $f(1) = \dfrac{1}{3}$ et $f'(1) = \dfrac{2}{9}$; on sait que l'équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est : $(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1) \Rightarrow y = \dfrac{2}{9}(x-1) + \dfrac{1}{3} \Rightarrow y = \dfrac{2}{9}x + \dfrac{1}{9}$.

Exercice 4 :

La courbe ci-contre est la représentation d'une fonction f, dérivable sur $]-\infty\,;\,4]$.

1. On sait que $f'(a)$ correspond au coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a. Or au point d'abscisse 0 la tangente a pour pente $m = -2$; ainsi $f'(0) = -2$.

2. De même on a $f'(-2) = 0$ et $f'(4) = 4$.

3. La tangente au point d'abscisse 4 a pour équation :
$y = f'(4) \times (x-4) + f(4) \Leftrightarrow y = 4(x-4) + 0 \Leftrightarrow y = 4x - 16$.