

CORRECTION : DS n°3

Exercice 1 :

Réolvons l'inéquation $-x + 1 \geq \frac{6}{2-x}$.

- Condition : $2 - x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ donc $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- $-x + 1 \geq \frac{6}{2-x} \Leftrightarrow \frac{(-x+1)(2-x)-6}{2-x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3x-4}{2-x} \geq 0$.

Signe du numérateur : soit le polynôme du second degré $P(x) = x^2 - 3x - 4$, avec $a = 1$, $b = -3$ et $c = -4$.
 $x_1 = -1$ est racine évidente de P ; on a $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \Leftrightarrow -x_2 = -4 \Leftrightarrow x_2 = 4$.
 (♣) $P(x)$ est du signe de $a = 1$ sauf entre ses racines.

Signe du dénominateur : $2 - x \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq x$.

On a donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-1	2	4	$+\infty$	
$P(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$2-x$	$+$		$+$	0	$-$	$-$
Quotient	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$

♣

On en conclut que $\mathcal{S} =]-\infty; -1] \cup]2; 4]$.

Exercice 2 :

1. Soit la fonction polynôme Q définie par $Q(m) = m^2 - 4m - 12$.

C'est un polynôme de degré 2 avec $a = 1$, $b = -4$ et $c = -12$.

Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = 64$; comme $\Delta > 0$ alors Q admet deux racines :

$$m_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -2 \text{ et } m_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 6.$$

$Q(m)$ est du signe de $a = 1$ sauf entre ses racines, ce qui donne le tableau de signe suivant :

m	$-\infty$	-2	6	$+\infty$	
$m^2 - 4m - 12$	+	0	-	0	+

2. Soit la fonction polynôme P définie par $P(x) = x^2 - mx + (m+3)$ où m est un réel.

C'est un polynôme de degré 2 avec $a = 1$, $b = -m$ et $c = m+3$.

Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 4m - 12 = Q(m)$.

D'après la question précédente on peut affirmer que :

- si $m \in]-2; 6[$: $Q(m) < 0$, c.à.d $\Delta < 0$, donc P n'admet aucune racine ;
- si $m \in \{-2; 6\}$: $Q(m) = 0$, c.à.d $\Delta = 0$, donc P admet une unique racine ;
- si $m \in]-\infty; -2[\cup]6; +\infty[$: $Q(m) > 0$, c.à.d $\Delta > 0$, donc P admet deux racines.

Exercice 3 :

1. On sait que pour tout réel x , $\sin(-x) = -\sin x$; on a aussi $\sin(\pi - x) = \sin x$.

De plus $\cos(9\pi + x) = \cos(4 \times 2\pi + \pi + x) = \cos(\pi + x) = -\cos x$ car la fonction cosinus est 2π périodique.

D'où $A = -\sin x - 3 \sin x - (-\cos x) = -4 \sin x + \cos x$.

On a $\cos(15\pi - x) = \cos(7 \times 2\pi + \pi - x) = \cos(\pi - x) = -\cos x$.

De plus $\sin(-x - \pi) = -\sin(\pi + x) = -(-\sin x) = \sin x$.

D'où $B = -\cos x + \sin x$.

2. Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ tel que $\cos x = \frac{\sqrt{7}}{5}$. D'après la relation fondamentale :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \frac{7}{25} + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{18}{25} \Leftrightarrow \sin x = \frac{-3\sqrt{2}}{5} \text{ ou } \sin x = \frac{3\sqrt{2}}{5}.$$

Mais $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, donc $\sin x \leq 0$; finalement $\sin x = \frac{-3\sqrt{2}}{5}$.

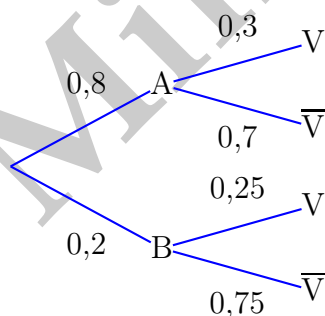
Exercice 4 :

Un jeu consiste à combattre en duel soit un monstre A, soit un monstre B.

On a une probabilité de $\frac{4}{5}$ d'affronter le monstre A.

Le joueur gagne contre le monstre A dans 30% des cas, et gagne contre le monstre B dans 25% des cas.

1. On a l'arbre pondéré suivant :



2. $p(B \cap V) = p(B) \times p_B(V) = 0,2 \times 0,25 = 0,05$.

3. Les événements A et B forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales on a donc :

$$p(V) = p(A \cap V) + p(B \cap V) = \frac{4}{5} \times 0,3 + \frac{1}{20} = 0,24 + 0,05 = 0,29.$$

4. Calculons la probabilité d'avoir combattu le monstre B sachant que le joueur est victorieux :

$$p_V(B) = \frac{p(V \cap B)}{p(V)} = \frac{0,05}{0,29} = 0,1724.$$