CORRECTION : DS $n°2$

Exercice 1 :

1. Soit l'équation $X^2 - 6X - 7 = 0$ avec $a = 1$, $b = -6$ et $c = -7$.
$X_1 = -1$ est solution évidente de cette équation de degré 2 ; alors $-1 \times X_2 = \dfrac{c}{a} \Leftrightarrow X_2 = 7$. Donc $\mathscr{S} = \{-1; 7\}$.

2. Déduisons-en les solutions de :

a. $-x^4 + 6x^2 + 7 = 0$.
Posons $X = x^2$, l'équation devient $-X^2 + 6X + 7 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 6X - 7 = 0$.
Or d'après la question précédente, $X^2 - 6X - 7 = 0 \Leftrightarrow X = -1$ ou $X = 7$.
Par conséquent on a :
• soit $x^2 = -1$ qui est impossible car le carré d'un réel est positif ;
• soit $x^2 = 7 \Leftrightarrow x = -\sqrt{7}$ ou $x = \sqrt{7}$.
L'ensemble des solutions est donc $\mathscr{S} = \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$.

b. $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{6}{x} - 7 = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{x}\right)^2 - 6\left(\dfrac{1}{x}\right) - 7 = 0$.
Il faut que $x \neq 0$, c.à.d $D = \mathbb{R}^*$.
Posons $X = \dfrac{1}{x}$, l'équation devient $X^2 - 6X - 7 = 0 \Leftrightarrow X = -1$ ou $X = 7$.
Par conséquent on a :
• soit $\dfrac{1}{x} = -1 \Leftrightarrow x = -1$
• soit $\dfrac{1}{x} = 7 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{7}$.
L'ensemble des solutions est donc $\mathscr{S} = \left\{-1; \dfrac{1}{7}\right\}$.

Exercice 2 : On a :

$A = \cos\dfrac{\pi}{3} - \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + 3\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2} - (-1) + 3 \times \dfrac{1}{2} = 3$.

$B = \sin\dfrac{3\pi}{4} + 2\cos\dfrac{5\pi}{4} = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{\pi}{4} - 2\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 2 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$C = \cos\dfrac{7\pi}{6} - \cos\dfrac{3\pi}{2} = \cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) - 0 = -\cos\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

En effet on sait que pour tout réel x on a :
$\sin(\pi - x) = \sin x$, $\cos(\pi + x) = -\cos x$.

Exercice 3 :

Plaçons sur le cercle trigonométrique les points A, B, C, D, E associés aux réels :

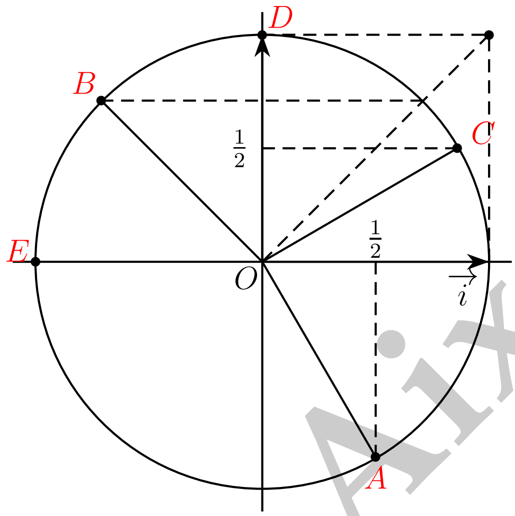
1. $a = -\dfrac{\pi}{3}$.

2. $b = \dfrac{3\pi}{4} = \pi - \dfrac{\pi}{4}$.

3. $c = \dfrac{\pi}{6}$

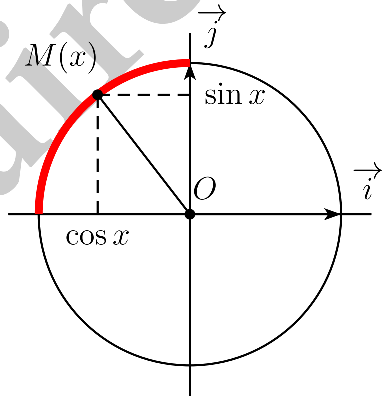
4. $d = -\dfrac{3\pi}{2}$

5. $e = 37\pi = 18 \times 2\pi + \pi$



Exercice 4 :

1/ Soit $x \in \left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ tel que $\sin x = \dfrac{\sqrt{5}}{4}$.
D'après la relation fondamentale :
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x + \dfrac{5}{16} = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \dfrac{11}{16}$
$\Leftrightarrow \cos x = \dfrac{-\sqrt{11}}{4}$ ou $\cos x = \dfrac{\sqrt{11}}{4}$.
Mais comme $x \in \left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$, $\cos x \leqslant 0$; donc $\cos x = \dfrac{-\sqrt{11}}{4}$.



2/ Simplifions les quantités suivantes :

$A = \sin(-x) + \sin(\pi + x) - 5\cos(\pi - x) = -\sin x - \sin x - 5(-\cos x) = -2\sin x + 5\cos x$.

$B = \cos(17\pi + x) - 2\sin(\pi - x) = \cos(8 \times 2\pi + \pi + x) - 2\sin x = \cos(\pi + x) - 2\sin x = -\cos x - 2\sin x$.