CORRECTION : DS $n°1$

Exercice 1 :

1. Mettons sous forme canonique :

2. $P(x) = x^2 + 4x - 3 = x^2 + 4x - 3 = (x+2)^2 - 4 - 3 = (x+2)^2 - 7.$

3. $P(x) = -3x^2 + 3x + 1 = -3\left[x^2 - x\right] + 1 = -3\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] + 1 = -3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}.$

Exercice 2 :

1. Soit l'équation $x^2 - 2x - 15 = 0$ avec $a = 1$, $b = -2$ et $c = -15$.
Soit discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = 64$; comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 5$; donc $\mathscr{S} = \{-3; 5\}$.

2. Déduisons-en les solutions de :

a. $x^4 - 2x^2 - 15 = 0$:
Posons $X = x^2$, l'équation devient $X^2 - 2X - 15 = 0 \Leftrightarrow X = -3$ ou $X = 5$.
Par conséquent on a :
- soit $x^2 = -3$ qui est impossible car le carré d'un réel est positif ;
- soit $x^2 = 5 \Leftrightarrow x = -\sqrt{5}$ ou $x = \sqrt{5}$.

L'ensemble des solutions est donc $\mathscr{S} = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$.

b. $(x-1)^2 - 2(x-1) = 15$:
Posons $X = x - 1$, l'équation devient $X^2 - 2X = 15 \Leftrightarrow X^2 - 2X - 15 = 0 \Leftrightarrow X = -2$ ou $X = 5$.
Par conséquent on a :
- soit $x - 1 = -3 \Leftrightarrow x = -2$
- soit $x - 1 = 5 \Leftrightarrow x = 6$.

L'ensemble des solutions est donc $\mathscr{S} = \{-2; 6\}$.

Exercice 3 :

Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{4}{x-1} - x = 2$:
- Condition : $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$; donc $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- $\dfrac{4}{x-1} - x = 2 \Leftrightarrow \dfrac{4 - x(x-1) - 2(x-1)}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^2 - x + 6}{x-1} = 0 \Leftrightarrow -x^2 - x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0.$

2 est solution évidente de l'équation ; $2x_2 = \dfrac{c}{a} \Leftrightarrow 2x_2 = -6 \Leftrightarrow x_2 = -3$.

On a donc $\mathscr{S} = \{2; -3\}$.

Exercice 4 :

Notons n le nombre d'heures travaillées, et s le salaire horaire de Marc (avec $n > 0$ et $s > 0$). On a alors :
- « Marc a travaillé un certain nombre d'heures pour 418 € » donne : $ns = 418$.
- « si le patron me payait 3 € de plus par heure, en faisant deux heures de moins j'aurais touché 425 € » donne : $(n-2)(s+3) = 425$.

La première équation nous donne $s = \dfrac{418}{n}$; en reportant dans la deuxième on obtient :

$(n-2) \times \left(\dfrac{418}{n} + 3\right) = 425 \Leftrightarrow 418 + 3n - \dfrac{836}{n} - 6 = 425 \Leftrightarrow 3n - \dfrac{836}{n} - 13 = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3n^2 - 836 - 13n}{n} = 0 \Leftrightarrow 3n^2 - 13n - 836 = 0$

On obtient une équation du second degré avec $a = 3$, $b = -13$ et $c = -836$.
Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = 10201$.

L'équation admet donc deux solutions : $n_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\dfrac{44}{3}$ et $n_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 19$.

Le nombre recherché étant un réel positif, on en déduit que Marc a travaillé 19 heures.